https://gospodarkainnowacje.pl GOSPODARKA I INNOWACJE

LABORATORIUM WIEDZY Artur Borcuch

Volume: 27 | 2022

Economy and Innovation
ISSN: 2545-0573

ОБ ОДНОЙ ВЕСОВОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО ПОРЯДКУ СХОДИ-МОСТИ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p^{(m)}(K_n)$

Б. Р. Абдуллаев

Ассистент кафедры «математика и естественных наук» Бухарского института управления природными ресурсами Тииимсхниу

К. Х. Кобилов

Ассистент кафедры «Прикладной математики и технологии программирование» Бухарского государственного университета

A R T I C L E I N F O.

Ключевые слова:
Оптимальная кубатурная формула, пространство Соболева, кубатурная формула.

Аннотация

В настоящей работе обсуждается асимптотическая оптимальность одной весовой кубатурной формулы в пространстве $L_p^{(m)}(K_n)$.

Рассмотрим кубатурную формулу вида

$$\int_{K_n} p(x)\, f(x)\, dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right) \tag{1}$$

над пространством Соболева $L_p^{(m)}(K_n)$, где K_n – n-мерный единичный куб.

Обобщённая функция

$$\ell_N(x) = p(x)\varepsilon_{K_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right) \tag{2}$$

называется *функционалом погрешности* кубатурной формулы (1),

$$< \ell_N(x), f(x) >= \int_{K_n} p(x) f(x) dx - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right)$$

является погрешностью кубатурной формулы (1), $p(x) \in L_p(K_n)$ весовая функция, $\varepsilon_{K_n}(x)$ - характеристическая функция K_n, c_λ и $x^{(\lambda)}$ - *коэффициенты* и *узлы* кубатурной формулы (1) и $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Определение. *Пространство* $L_p^{(m)}(K_n)$ *- определяется как пространство функций заданных на* n*-мерном единичном кубе* K_n *и имеющие все обобщённые производные порядка* m*, суммируемые со степенью* p *в норме (см. [1])*

$$\left\| f(x) / L_p^{(m)}(K_n) \right\| = \left\{ \int\limits_{K_n} \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left[D^{|\alpha|} f(x) \right]^2 \right\}^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad (3)$$

где $D^{|\alpha|} = \dfrac{\partial^m}{dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \dots dx_n^{\alpha_n}}$, $\quad |\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j, \ \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$.

Справедлива следующая

Лемма. *Если для функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) выполняется условие Декартовых произведений, т.е.*

$$\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \otimes \ell_{N_2}(x_2) \otimes \ldots \otimes \ell_{N_n}(x_n)$$

и

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i) / L_p^{(m_i)*}(0,1) \right\| \le d_i \frac{1}{N_i^{m_i}}, \quad d_i \text{ - константы}, \qquad (4)$$

т.е.

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i) / L_p^{(m_i)*}(0,1) \right\| \le d_i\, O\left(h^{m_i}\right), \quad d_i \text{ - константы}, \left(i = \overline{1,n}\right), \qquad (5)$$

то

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \le d \cdot \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} N_i^{m_i}}, \quad d \text{ - константа}, \qquad (6)$$

или

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \le d \cdot O\left(h^m\right),$$

где $\ell_{N_i}(x_i) = p(x_i)\varepsilon_{k_i}(x_i) - \sum\limits_{\lambda_i=1}^{N_i} c_{\lambda_i} \delta\left(x_i - x_i^{(\lambda_i)}\right), d = \prod\limits_{i=1}^{n} d_i$ и $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Доказательство ведем методом математической индукции.

Пусть $n = 2$, тогда $x = (x_1, x_2)$, $\quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\quad m = m_1 + m_2$, $\quad dx = dx_1 dx_2$, $f(x) = f(x_1, x_2)$, $p(x) = p(x_1, x_2)$ и $\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \otimes \ell_{N_2}(x_2)$.

Так как в дальнейшем мы будем использовать норму функции в одномерном случае то (3) при $n = 1$ принимает следующий вид.

$$\left\| f\left(x_i\right) \Big/ L_p^{(m_i)^*}(0,1) \right\| = \left\{ \int_0^1 \left[\frac{d^{m_i}}{dx_i^{m_i}} f\left(x_i\right) \right]^p dx_i \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{7}$$

Таким образом, имеем

$$\left| < \ell_N\left(x_1,x_2\right), f\left(x_1,x_2\right) > \right| = \left| < \ell_{N_2}\left(x_2\right), < \ell_{N_1}\left(x_1\right), f\left(x_1,x_2\right) >> \right| \le$$

$$\le \left\| \ell_{N_2}\left(x_2\right) \Big/ L_p^{(m_2)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| < \ell_{N_1}\left(x_1\right), f\left(x_1,x_2\right) > \Big/ L_p^{(m_2)}(0,1) \right\|, \tag{8}$$

Вычислим следующую норму

$$\left\| < \ell_{N_1}\left(x_1\right), f\left(x_1,x_2\right) > \Big/ L_p^{(m_2)}(0,1) \right\| =$$

$$= \left\{ \int_0^1 \left| \frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} < \ell_{N_1}\left(x_1\right), f\left(x_1,x_2\right) > \right|^p dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{ \int_0^1 \left| < \ell_{N_1}(x_1), \frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} f\left(x_1,x_2\right) \right|^p dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left\{ \int_0^1 \left[\left\| \ell_{N_1}\left(x_1\right) \Big/ L_p^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} f\left(x_1,x_2\right) \Big/ L_p^{(m_1)}(0,1) \right\| \right]^p dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\| \ell_{N_1}\left(x_1\right) \Big/ L_p^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\{ \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} f\left(x_1,x_2\right) \right]^p dx_1 \right\} dx_2 \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= d' \left\| \ell_{N_1}\left(x_1\right) \Big/ L_p^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f\left(x\right) \Big/ L_p^{(m)}\left(K_2\right) \right\|, \tag{9}$$

где d' - константа.

Таким образом, из (8) и (9) получим:

$$\left| < \ell_N\left(x_1,x_2\right), f\left(x_1,x_2\right) > \right| \le$$

$$\le d' \left\| \ell_{N_2}\left(x_2\right) \Big/ L_p^{(m_2)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_1}\left(x_1\right) \Big/ L_p^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f\left(x\right) \Big/ L_p^{(m)}\left(K_2\right) \right\|, \tag{10}$$

Из (10), пользуясь определением нормы, получим

$$\left\| \ell_N\left(x\right) \Big/ L_p^{(m)^*}\left(K_2\right) \right\| \le d' \left\| \ell_{N_1}\left(x_1\right) \Big/ L_p^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_2}\left(x_2\right) \Big/ L_p^{(m_2)^*}(0,1) \right\|, \tag{11}$$

Учитывая (4), на основании (11), имеем

$$\left\| \ell_N(x) \middle/ L_p^{(m)^*}(K_2) \right\| \le d' \cdot d_1 \cdot d_2 \frac{1}{N_1^{m_1} N_2^{m_2}}$$

т.е.

$$\left\| \ell_N(x) \middle/ L_p^{(m)*}(K_2) \right\| \le d_3 O\left(h^{m_1}\right) O\left(h^{m_2}\right), \qquad (12)$$

где $d_3 = d' \cdot d_1 \cdot d_2$.

Пусть теперь неравенство (6) справедливо при $n = k$, тогда на основании приведенных выше вычислений, получим

$$\left| < \ell_N(x), f(x) > \right| = \left| < \ell_N(x_1, x_2, ..., x_k), f(x_1, x_2, ..., x_k) > \right| =$$

$$= \left| < \ell_{N_k}(x_k), < \ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}), ..., < \ell_{N_2}(x_2), < \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2, .., x_k) >> ... >> \right| \le$$

$$\le \left\| \ell_{N_k}^{(x_k)} \middle/ L_p^{(m_k)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}) \middle/ L_p^{(m_{k-1})*}(0,1) \right\| \cdot ...$$

$$... \cdot \left\| < \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2, ..., x_k) > \middle/ L_p^{(m_1)}(0,1) \right\| \le$$

$$\le d'' \left\| \ell_{N_k}(x_k) \middle/ L_p^{(m_k)*}(0,1) \right\| \cdot ... \cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1) \middle/ L_p^{(m_1)*}(x_1) \right\| \cdot \left\| f(x) \middle/ L_p^{(m)}(K_k) \right\|, \qquad (13)$$

где d'' - константа.

Из (13), используя определение нормы функционала, будем иметь

$$\left\| \ell_N(x) \middle/ L_p^{(m)*}(K_k) \right\| \le d'' \left\| \ell_{N_1}(x_1) \middle/ L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot ... \cdot \left\| \ell_{N_k}(x_k) \middle/ L_p^{(m_k)*}(0,1) \right\|. \qquad (14)$$

Тогда, с помощью (4) неравенство (14) приводим к виду

$$\left\| \ell_N(x) \middle/ L_p^{(m)*}(K_k) \right\| \le d'' \cdot d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} ... N_k^{m_k}}$$

или

$$\left\| \ell_N(x) \middle/ L_p^{(m)^*}(K_k) \right\| \le d'' \cdot d\, O\left(h^{m_1}\right) ... O\left(h^{m_k}\right),$$

где $d = \prod_{i=1}^{k} d_i$.

Используя справедливость утверждения леммы при $n = k$ докажем, что утверждение выполняется при $n = k + 1$. Учитывая (13) при $n = k + 1$ оценим погрешность кубатурной формулы вида (1)

$$\left|<\ell_{N_{k+1}}\left(x_1,x_2,...,x_{k+1}\right), f\left(x_1,x_2,...,x_{k+1}\right)>\right|=$$

$$\left|<\ell_{N_1}\left(x_1\right),<\ell_{N_2}\left(x_2\right),<...<\ell_{N_k}\left(x_k\right),<\ell_{N_{k+1}}\left(x_{k+1}\right), f\left(x_1,x_2,..,x_{k+1}\right)>>...>>>\right|\leq$$
$$\leq\left\|\ell_{N_1}\left(x_1\right)/L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\|\cdot...\cdot\left\|\ell_{N_k}\left(x\right)/L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\|\times$$

$$\times\left\|<\ell_{N_{k+1}}\left(x_{k+1}\right), f\left(x_1,x_2,...,x_{k+1}\right)>/L_p^{(m_{k+1})}(0,1)\right\|. \qquad (15)$$

Отсюда, как и выше, пользуясь определением нормы функционала, получим

$$\left\|\ell_N\left(x\right)/L_p^{(m)*}\left(K_{k+1}\right)\right\|\leq d''\left\|\ell_{N_1}\left(x_1\right)/L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\|\cdot...$$

$$...\cdot\left\|\ell_{N_k}\left(x_k\right)/L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\|\cdot\left\|\ell_{N_{k+1}}\left(x_{k+1}\right)/L_p^{(m_{k+1})*}(0,1)\right\|. \qquad (16)$$

Из неравенств (4) и (16) имеем:

$$\left\|\ell_N\left(x\right)/L_p^{(m)*}\left(K_{k+1}\right)\right\|\leq d'''\cdot d\cdot\frac{1}{N_1^{m_1}\cdot N_2^{m_2}...N_{k+1}^{m_{k+1}}} \qquad (17)$$

или

$$\left\|\ell_N\left(x\right)/L_p^{(m)*}\left(K_{k+1}\right)\right\|\leq d'''\cdot d\cdot O\left(h^{m_1}\right)...O\left(h^{m_{k+1}}\right),$$

где $d=\prod_{i=1}^{k+1}d_i$.

Обобщая полученные результаты, в заключение отметим, что

$$\left\|\ell_N\left(x\right)/L_p^{(m)*}\left(K_n\right)\right\|\leq d\cdot\frac{1}{N_1^{m_1}\cdot N_2^{m_2}...N_n^{m_n}} \qquad (18)$$

или учитывая (5), из (17) будем иметь

$$\left\|\ell_N\left(x\right)/L_p^{(m)*}\left(K_n\right)\right\|\leq C\cdot O\left(h^{m_1}\right)...O\left(h^{m_n}\right),$$

т.е. $\left\|\ell_N\left(x\right)/L_p^{(m)*}\left(K_n\right)\right\|\leq C\cdot O\left(h^{m}\right)$, где $C=d'\cdot d''\cdot d'''\cdot\prod_{i=1}^{n}d_i$.

Лемма доказана.

С помощью этой леммы легко доказывается следующая теорема.

Теорема. *Весовая кубатурная формула (1) с функционалом погрешности (2) при* $N_1=N_2=...=N_n$, $\prod_{i=1}^{n}N_i=N$ *и* $m_1+m_2+...+m_n=m$ *является оптимальной по порядку сходимости над пространством* $L_p^{(m)}\left(K_n\right)$, *т.е. для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) имеет место равенство*

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| = O\left(N^{-\frac{m}{n}} \right).$$

Доказательство.

На основе леммы при $N_1 = N_2 = \ldots = N_n$ имеем $N_i = \sqrt[n]{N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Итак,

$$\prod_{i=1}^{n} N_i^{m_i} = N_1^{m_1+m_2+\ldots+m_n} = N^{\frac{m}{n}}. \qquad (19)$$

Подставляя (19) в неравенство (18) получим

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \le C \cdot N^{-\frac{m}{n}}, \qquad (20)$$

Из теоремы Н.С.Бахвалова[3] и неравенство (20) следует доказательство сформулированной теоремы.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974 – 808с.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Наука. 1988, - 333с.
3. Бахвалов Н.С.С Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной, Мат. заметки, 1972, т.2. №6, -С.655 – 664.