https://gospodarkainnowacje.pl

GOSPODARKA I INNOWACJE

LABORATORIUM WIEDZY Artur Borcuch

Volume: 33 | 2023

Economy and Innovation

ISSN: 2545-0573

For more information contact: editor@gospodarkainnowacje.pl

KOSHI TIPIDAGI INTEGRAL VA UNING BA'ZI XOSSALARI

Salimov Esanjon Xusen o'g'li

Samarqand iqtisodiyot va servis instituti

A R T I C L E I N F O.

Tayanch iboralar: Kompleks tekislik, Yopiq silliq chiziq, to'ldiruvchi nuqta, analitik soha, Koshi tipidagi integral, kompleks tekislik, analitilk funksiya.

Annotatsiya

Analitik funksiyaning chegaraviy masalalarini yechishda asosiy apparat sifatida Koshi tipidagi integral muxim rol o'ynaydi. Shuning uchun biz avvalo Koshi tipidagi integralning xossalarini o'rganamiz.

Kompleks tekisligida γ-yopiq silliq chiziq berilgan bo'lsin. γ- chiziqning ichki qismida joylashgan sohani D^+ bilan, $D^+{}_+\gamma$ sohani to'ldiruvchi va cheksiz uzoq nuqtani uz ichiga oluvchi tashki soxani esa D^- bilan belgilaymiz. Ma'lumki, agar f(z) funksiya D^+ sohada analitik, $D^+{}_+\gamma$ da esa uzluksiz bo'lsa, u holda Koshi teoremasiga asosan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \qquad (1)$$

Agar f(z) funksiya D^- sohada analitik, $D^-{}_+\gamma$ da uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- \end{cases} \qquad (2)$$

(1) va (2) formulalarning chap tomonidagi integralga Koshi integrali deyiladi. (1) va (2) formulalarga Koshi formulalari deyiladi.

Koshi formulasi, agar funksiyaning chegaradagi qiymati berilganda, uning sohaning istalgan nuqtasidagi qiymatini hisoblash imkoniyatini beradi.

Kompleks tekisligining chekli qismida berilgan γ-yopiq yoki ochiq chiziq bo'lsin. Bu chiziqda φ(τ) uzluksiz funksiya aniqlangan bo'lsin. U holda

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \qquad (3)$$

shunday aniqlangan integralga Koshi tipidagi integral deyiladi, bunda φ(τ) ga uning zichligi $\frac{1}{\tau - z}$ ga esa yadrosi deyiladi.

Koshi tipidagi integral γ-chizikdan tashqari kompleks tekisligining hamma joyida analitik funksiyani ifodalaydi. Biz quyida shunday teoremani isbot qilamizki, bundan xususiy holda Koshi tipidagi integralning analitik funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Teorema. γ-yopiq yoki ochiq chiziq bo'lsin. f(*τ*, *z*) funksiya: τ∈γ bo'yicha uzluksiz, z bo'yicha biror D sohada ∀τ∈γ lar uchun analitik va ∀τ∈γ, ∀z∈D lar uchun esa $|f(\tau, z)| \leq M$ bo'lsa, u holda

$$F(z) = \int_{\gamma} f(\tau, z) d\tau \qquad (4)$$

funksiya z o'zgaruvchi bo'yicha analitik bo'ladi.

Isbot. z nuqtani markaz qilib, C aylana chizamiz. C aylana butunlay D sohada yotsin. z bo'yicha analitik bo'lgan f(τ, z) funksiyani Koshi integrali orqali ifoda qilamiz:

$$f(\tau, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\tau, t)}{t - z} dt$$

Unda (4) ni quyidagicha ifodalaymiz:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d\tau \int_C \frac{f(\tau, t)}{t - z} dt$$

$\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{t - z - \Delta z} - \frac{1}{t - z}\right] - \frac{1}{(t-z)^2} = \frac{\Delta z}{(t-z)^2 (t - z - \Delta z)}$ ayniyatdan foydalanib

$$I = \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d\tau \int_C \frac{f(\tau, t)}{(t-z)^2} dt = \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_{\gamma} d\tau \int_C \frac{f(\tau, t)}{(t-z)^2 (t - z - \Delta z)} dt$$

γ-chiziqning uzunligini *L* bilan belgilaymiz.

$|I| \leq \frac{|\Delta z|}{2\pi} \frac{M}{R^2 (R - |\Delta z|)} 2\pi RL,$ $\quad |\Delta z| -$ ni istagancha kichik qilish mumkin.

U holda

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d\tau \int_C \frac{f(\tau, t)}{(t-z)^2} dt \qquad (5)$$

Ikkinchi tomondan

$$f_z^1(\tau, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\tau, t)}{(t-z)^2} d\tau$$ (5) dan

$$F'(z) = \int_{\gamma} f_Z'(\tau, z) d\tau$$

Shunday qilib, F(z) funksiya, f(τ, z) funksiyaning analitik sohasida analitik bo'lar ekan. f(τ, z) funksiyaning analitik bo'lmagan z lari, F(z) funksiyaning maxsus nuqtasi bo'ladi.

Uzluksiz φ(τ) zichlikka ega bo'lgan Koshi tipidagi integral uchun integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtasi C aylananing nuqtalaridan iborat bo'ladi. Demak, F(z) funksiya uchun C aylana maxsus chiziq bo'lib hisoblanadi. Bundan keyin, Koshi tipidagi integralning z-nuqta γ-chiziqqa yaqinlashgandagi va chiziq ustidagi holatini tekshiramiz.

Agar γ-yopiq chiziq bo'lmasa, ya'ni ochiq chiziq bo'lsa F(z) funksiya γ-maxsus chiziqqa ega bo'ladi. Butun kompleks tekisligida (γ-dan tashqari) analitik bo'ladi. γ-yopiq chiziq bo'lganda F(z) funksiya ikkita funksiyaga ajraladi: D^+ da aniqlangan $F^+(z)$, D^- da aniqlangan $F^-(z)$ larga ajraladi. Bu funksiyalar mustaqil funksiyalar bo'lib, ular biri ikkinchisining analitik davomi emas.

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi^+(z), & z\in D^+\\ \Phi^-(z), & z\in D^-.\end{cases}$$ - bu funksiyani bo'lakli analitik funksiya deyiladi.

Koshi tipidagi integral bilan aniqlangan F(z) funksiya cheksiz uzoq nuqtada nolga aylanadi.

Haqiqattan ham, F(z) funksiyani cheksiz uzoq nuqta atrofida $\frac{1}{z}$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\frac{1}{\tau-z}=-\frac{1}{z}-\frac{\tau}{z^2}-\ldots-\frac{\tau^{n-1}}{z^n}-\ldots$$

buning har ikkala tomonini $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}$ ga ko'paytirib hadma-had integrallaymiz:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{z^k},\quad C_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\tau^{k-1}\varphi(\tau)d\tau,$$

bu yerdan $F^-(z)=0$. (6)

Misol.

$\varphi(\tau)=\frac{2}{\tau(\tau-2)},\quad \gamma:|z|=1$ birlik aylana bo'lganda

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\frac{2}{\tau(\tau-2)}}{\tau-z}d\tau$$ Koshi tipidagi integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{2}{\tau(\tau-2)}=\left(\frac{1}{\tau-2}-\frac{1}{\tau}\right)$ ayniyatga asosan

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\tau-2}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}=I_1-I_2.$$

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\tau-2}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z},\qquad \frac{1}{z-2}$$ funksiya D^+ da analitik;

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d\tau}{\tau - z}, \qquad \frac{1}{z}$$ esa D⁻ da analitik va ∞ da nolga aylanadi.

(1) formulaga asosan I_1 integral: $I_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{z-2}, & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^-. \end{cases}$

(2) formulaga asosan I_2 integral: $I_2 = \begin{cases} 0, & z \in D^+ \\ -\dfrac{1}{z}, & z \in D^-. \end{cases}$

Shunday qilib, $\Phi^+(z) = \dfrac{1}{z-2}, \quad \Phi^-(z) = \dfrac{1}{z}.$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Gaxov F.D., Kraevie zadachi, M.,izd.''Nauka'' 1977g.
2. N.I.Musxelishvili, Singulyarnie integralnie uravnenie, M.,izd. Fiz-mat. Lit 1962.
3. Litvinchuk G.S., Kraevie zadachi i singulyarniye integralniye uravneniya so sdvigom, izd. "Nauka" M.,1977g.